

# Vektoriteration

Andreas Hahn

29. Januar 2009

## 1 Zweck

Sogenannte Vektoriterationsverfahren sind Verfahren zur Eigenwert- und Eigenvektor-Ermittlung von Matrizen. In der Vorlesung wurde auf drei Verfahren speziell eingegangen.

## 2 Verfahren für den größten Eigenwert

### 2.1 Potenzmethode / klassische Vektoriteration

Die Potenzmethode sucht den betragsgrößten Eigenwert einer allgemeinen  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  Matrix.

Wir definieren einen Startvektor  $u_0 \in \mathbb{C}^n$  mit  $|u_0| = 1$  und  $\|\cdot\|$  sei eine Vektornorm. Dann iterieren wir für  $k > 0$ :

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= A u_k \\ \mu_{k+1} &= \|v_{k+1}\| \\ u_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{\mu_{k+1}}\end{aligned}$$

$\mu_k$  konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen den größten Eigenwert von  $A$  und  $u_k$  gegen den zugehörigen Eigenvektor.

In der Vorlesung wurde angenommen, dass der größte Eigenwert einfache Vielfachheit hat. Dies ist aber keine notwendige Voraussetzung.<sup>1</sup>

### 2.2 Von-Mises-Iteration

Die Von-Mises-Iteration funktioniert nur für symmetrische Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , und es muss gelten  $\|\cdot\| = |\cdot|$ .

Auch hier benötigen wir wieder einen Startvektor  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  und iterieren

$$\begin{aligned}v_{k+1} &= A u_k \\ u_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{|v_{k+1}|} \\ \mu_{k+1} &= u_k \cdot A u_k = u_k v_{k+1}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>M. Hermann: Numerische Mathematik (S.149)

$\mu_k$  konvergiert dann wieder gegen den größten Eigenwert für  $k \rightarrow \infty$  und  $u_k$  gegen den zugehörigen Eigenvektor.

## 2.3 Eigenschaften

- Konvergenzgeschwindigkeit: Seien  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  die Eigenwerte der Matrix  $A$ .

- Potenzmethode:  $||\mu_k - |\lambda_1|| \leq \frac{2|\lambda_1|}{|u_0 z_1|} \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k$
- Von-Mises-Iteration:  $|\mu_k - \lambda_1| \leq \frac{8|\lambda_1|}{|u_0 z_1|^2} \left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^{2(k-1)}$

Die Von-Mises-Iteration konvergiert also bei wachsendem  $k$  für symmetrische Matrizen erheblich schneller.

- Für den Startvektor muss gelten:  $u_0 z_1 \neq 0$ , mit  $z_1$  Eigenvektor zum größten Eigenwert. Das ist in der Praxis aber normalerweise durch Rundungsfehler ohnehin gegeben.

## 3 Inverse Vektoriteration mit Shift

Für die Suche nach dem kleinsten Eigenwert einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  wird die inverse Vektoriteration eingesetzt. Dazu muss  $A$  invertierbar sein.

Suchen wir einen beliebigen Eigenwert kann das mit Hilfe eines Shiftes  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$  ( $\lambda \notin \text{spec}(A)$ ) und der Suche nach dem kleinsten Eigenwert von  $A - \hat{\lambda} \text{Id}$  geschehen.

Hier wird dann mit Hilfe der Potenzmethode der größte Eigenwert von  $(A - \hat{\lambda} \text{Id})^{-1}$  gesucht:

$$\begin{aligned} (A - \lambda \text{Id})v_{k+1} &= u_k (\text{Lösung eines Gleichungssystems}) \\ u_{k+1} &= \frac{v_{k+1}}{|v_{k+1}|} \\ \mu_{k+1} &= u_k \cdot (A - \lambda \text{Id})^{-1} u_k = u_k \cdot v_{k+1} \end{aligned}$$

Das ergibt aber einige Probleme:

- In jedem Durchgang muss mit viel Rechenaufwand ein Gleichungssystem gelöst werden. Das geht in der Praxis nur näherungsweise. Man kann sich aber mit der einmaligen Durchführung der LR-Zerlegung behelfen und senkt damit den Aufwand für das Verfahren von  $O(n^3)$  auf  $O(n^2)$ .
- Die Durchführung des Verfahrens mit variablem Shift (z.B.  $\lambda = \mu_k$  im  $k$ -ten Schritt) heißt *Rayleigh-Quotienten-Iteration* und konvergiert lokal quadratisch ( $A$  muss nicht symmetrisch sein.)

Für hermitesche Matrizen konvergiert sie sogar lokal kubisch.

(Beim Beispiel  $A - \mu_k \text{Id}$  wird die Matrix „zunehmend singular“, die Berechnung des Eigenvektors bleibt aber stabil.)

Zu bedenken ist, dass die LR-Zerlegung damit nur für einige Iterationen nutzbar ist und muss dann wiederholt werden muss.